

LINEARNO

PROGRAMIRANJE





pametneodluke.com

mbelcevic.me

Pametne odluke E01



Uvod u linearno programiranje (LP)



Obradićemo...

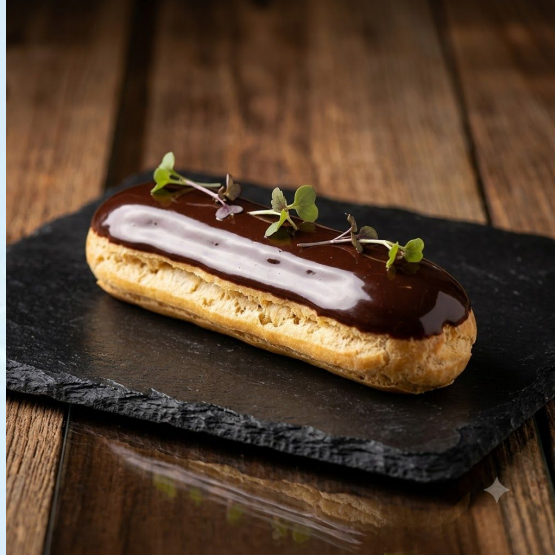
- ❑ Definicija LP
- ❑ Kratka istorija LP
- ❑ Primer LP u praksi
- ❑ Osnovni pojmovi LP

programiranje u
linearno programiranje (LP),
nema veze sa
“onim” programiranjem,
tj. razvojem softvera



zamisli...













Uvod u linearno programiranje (LP)

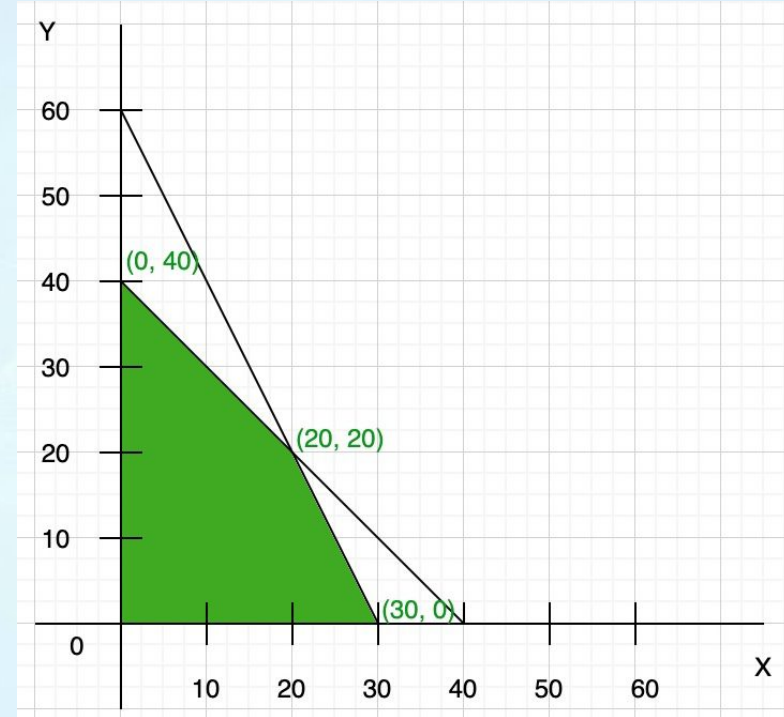
- ❑ **Definicija LP**
- ❑ Kratka istorija LP
- ❑ Primer LP u praksi
- ❑ Osnovni pojmovi LP



Linearno programiranje (LP), odnosno linearna optimizacija je matematička metodologija za modeliranje i rešavanje problema nalaženja maksimuma ili minimuma linearne funkcije, sa određenim ograničenjima tj. pod uslovima iskazanim kao linearne jednačine ili nejednačine.

Glavne karakteristike:

- Proporcionalnost
- Aditivnost
- Konačnost





Uvod u linearno programiranje (LP)

- ❑ Definicija LP
- ❑ **Kratka istorija LP**
- ❑ Primer LP u praksi
- ❑ Osnovni pojmovi LP



Fourier,
1820-te



Wikimedia commons

Fourier,
1820-te



Wikimedia commons

Kantorovich & Leontief,
1930-te



Wikimedia commons

Fourier,
1820-te



Wikimedia commons

Kantorovich & Leontief,
1930-te



WWII



Wikimedia commons

Fourier,
1820-te



Wikimedia commons

Kantorovich & Leontief,
1930-te



WWII



Wikimedia commons

Dantzig & von Neumann
1940-te







Uvod u linearno programiranje (LP)

- ❑ Definicija LP
- ❑ Kratka istorija LP
- ❑ **Primer LP u praksi**
- ❑ Osnovni pojmovi LP



Imamo cilj, proizvode, resurse i ograničenja



Cilj

Što veća zarada od prodaje kolača

Resurs

Ograničenje

Majstor poslastičar

Naš majstor poslastičar radi 8 sati dnevno (480 minuta)

Peć

Peć može da radi ukupno 360 minuta dnevno

Brašno

Na raspolaganju imamo 4.000 grama specijalnog brašna dnevno

Proizvod	Vreme pripreme (min)	Vreme pečenja (min)	Utrošak brašna (g)	Zarada po komadu (€)
Voćni tart (x_1)	10	15	200	12 €
Ekler (x_2)	20	5	100	8 €
Krem brule (x_3)	5	10	50	6 €



Proizvod	Vreme pripreme (min)	Vreme pečenja (min)	Utrošak brašna (g)	Zarada po komadu (€)
Voćni tart (x_1)	10	15	200	12 €
Ekler (x_2)	20	5	100	8 €
Krem brule (x_3)	5	10	50	6 €

Komponenta	Matematički zapis	Tumačenje
Funkcija cilja	$Max Z = 12x_1 + 8x_2 + 6x_3$	Maksimizacija ukupnog dnevnog profita
Ograničenje 1: Priprema	$10x_1 + 20x_2 + 5x_3 \leq 480$	Radno vreme poslastičara (480 min)
Ograničenje 2: Pečenje	$15x_1 + 5x_2 + 10x_3 \leq 360$	Kapacitet peći (360 min)
Ograničenje 3: Brašno	$200x_1 + 100x_2 + 50x_3 \leq 4000$	Dnevne zalihe brašna (4.000 g)
Uslov nenegativnosti	$x_1, x_2, x_3 \geq 0$	Nemoguće je proizvesti negativnu količinu



$$\max \quad Z = 12x_1 + 8x_2 + 6x_3$$

$$\text{p.o.} \quad 10x_1 + 20x_2 + 5x_3 \leq 480$$

$$15x_1 + 5x_2 + 10x_3 \leq 360$$

$$200x_1 + 100x_2 + 50x_3 \leq 4000$$

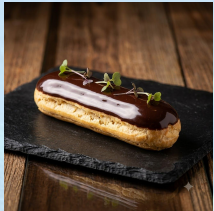
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

**U matematičkom zapisu p.o. znači pri ograničenjima (na engleskom se piše s.t. – subject to)*



Uvod u linearno programiranje (LP)

- ❑ Definicija LP
- ❑ Kratka istorija LP
- ❑ Primer LP u praksi
- ❑ **Osnovni pojmovi LP**



Linearne funkcije (linear functions)	Matematičke funkcije u kojima su promenljive na prvi stepen, a čiji je grafik uvek prava linija (Funkcija zarade je linearna: $Z = 12x_1 + 8x_2 + 6x_3$)
Promenljive odlučivanja (decision variables)	Nepoznate koje određujemo (npr. broj voćnih tartova, broj eklera itd.)
Dopustiva oblast (feasible region)	Geometrijska oblast (skup svih tačaka) koja istovremeno zadovoljava sva zadata ograničenja u modelu
Dopustivo rešenje (feasible solution)	Bilo koja pojedinačna kombinacija vrednosti promenljivih koja se nalazi unutar dopustive oblasti
Ekstremne tačke / temena (extreme points / vertices)	Ugaone tačke dopustive oblasti. Fundamentalna teorema LP: <i>Ako optimalno rešenje postoji, ono se sigurno nalazi u bar jednoj ekstremnoj tački.</i>
Ograničenja (constraints)	Matematičke nejednačine ili jednakosti koje predstavljaju granice resursa (vreme poslastičara, materijal, pećnica)
Funkcija cilja (objective function)	Glavna matematička funkcija čiju maksimalnu ili minimalnu vrednost želimo da izračunamo (u našem slučaju ponovo funkcija zarade $Z = 12x_1 + 8x_2 + 6x_3$)
Optimalno rešenje (optimal solution)	Ono dopustivo rešenje koje daje najbolju moguću (maksimalnu ili minimalnu) vrednost funkcije cilja (u našem primeru najveću zaradu)



Da rezimiramo...

Linearno programiranje je jedan od najstarijih i najrasprostranjenijih metoda optimizacije

Doživelo je procvat 1940-ih (Dancig i Nojmen), a moderni inicijalni razvoj 1930-ih (Kantorovič i Leontief)

Reč je o linearnoj (pravolinijskoj) funkciji gde se ishod menja proporcionalno sa varijablama (ne eksponencijalno)

Izdvađa se funkcija cilja (min ili max), varijable odlučivanja i ograničenja

Najpoznatiji algoritam/metoda rešavanja linearnih nejednačina i jednačina je simpleks (Dancig)



Izvori i više informacija

Literatura:

Krčevinac, S., Čangalović, M., Kovačević-Vujčić, V., Martić, M., & Vujošević, M. (2018). *Operaciona istraživanja 1*. Fakultet organizacionih nauka.

Dantzig, G. B. (1998). *Linear programming and extensions*. Princeton University Press. (Original work published 1963).

<https://archive.org/details/linearprogrammin0000geor>

Sa interneta:

[Wikipedia – Linearno programiranje](#)

Sve ilustracije generisane uz pomoć AI, osim ako nije drugačije navedeno